МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Методические указания
к выполнению лабораторных работ

ПЕНЗА 2007

Приведена методика и даны указания для выполнения лабораторных работ по изучению численных методов линейной алгебры. Представлены общие требования к оформлению отчетов о выполнении лабораторных работ, варианты заданий.

Методические указания подготовлены на кафедре «Высшая и прикладная математика» и предназначены для студентов специальности «Прикладная математика» при изучении курса «Численные методы линейной алгебры».

Библиогр. 5 назван.

Составитель **Н.Ю. Кудряшова**

Рецензент **А.М. Данилов,** д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Высшая математика» Пензенского государственного университета архитектуры и строительства

Введение

К численным методам алгебры относятся численные методы решения систем линейных уравнений, обращения матриц, вычисления определителей, нахождения собственных векторов и собственных значений.

При формальном подходе решение этих задач не встречает затруднений: решение системы можно найти, раскрыв определители в формуле Крамера; для нахождения собственных значений матрицы достаточно выписать характеристическое уравнение и найти его корни. Однако на практике, как правило, указанные рекомендации встречают ряд затруднений.

Так, например, при непосредственном раскрытии определителей решение системы с n неизвестными требует порядка $n!n$ арифметических операций. Другой причиной, по которой эти классические способы неприменимы даже при малых n, является сильное влияние округлений при вычислениях на окончательный результат. Точно также обстоит дело при нахождении собственных значений матрицы с использованием явного выражения характеристического многочлена.

Методы решения алгебраических задач разделяются на точные и приближенные (или итерационные). Под точными методами понимаются методы, которые дают решение задачи при помощи конечного числа элементарных арифметических операций. При этом, если исходные данные заданы точно и вычисления выполняются точно, то решение также получается точное. Приближенные методы являются средством нахождения приближенного решения. В этом случае решение получается как предел последовательных приближений, вычисляемых некоторым единообразным процессом. При применении итерационных методов существенным является не только сходимость построенных последовательных приближений, но и быстрота сходимости. В этом отношении каждый итерационный метод не является универсальным: давая быструю сходимость для одних матриц, он может сходиться медленно или даже совсем не сходиться для других. Поэтому при применении итерационных методов важную роль играет предварительная подготовка системы, т.е. замена данной системы ей эквивалентной, устроенной так, чтобы для нее выбранный процесс сходился по возможности быстро.

Замечание. При выполнении лабораторных работ было бы интересно сравнить результаты, получаемые для решаемых задач при использовании стандартных математических пакетов, с результатами, полученными по изучаемым в данном курсе численными методами

Требования к оформлению отчета о выполнении лабораторной работы

В отчет о выполнении лабораторной работы необходимо включить следующие пункты:

1. Тема лабораторной работы.
2. Постановка задачи и вариант задания.
3. Математическое описание метода решения поставленной задачи.
4. Листинг программы.
5. Результаты выполнения программы.
6. Анализ результатов и выводы.

Лабораторная работа №1

<u>**Точные методы решения систем линейных алгебраических уравнений**</u>.

Цель работы – решение систем алгебраических уравнений методом Гаусса, Гаусса – Жордана или методом квадратных корней.

Теоретическая часть

1) <u>Метод Гаусса</u> основан на последовательном исключении неизвестных. Этот метод имеет много вычислительных схем. Рассмотрим схему единственного деления.

Пусть дана система уравнений $AX = F$,

или в развернутом виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = f_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = f_n \end{cases} \qquad (1.1)$$

Предположим, что $a_{11} \neq 0$. Исключим неизвестное x_1 из всех уравнений (1.1), начиная со 2-го. Для этого 1-е уравнение разделим на a_{11}, и из всех остальных уравнений вычтем получившееся, умноженное на соответствующий коэффициент a_{j1}, $j = \overline{2,n}$.

В результате эти уравнения преобразуются к виду

$$\sum_{j=2}^{n} a_{ij}^{(1)} x_j = f_i^{(1)}, i = \overline{2,n}$$

Затем аналогично исключаем неизвестное x_2 из всех уравнений, начиная с 3-го и т.д.

В результате система преобразуется к треугольному виду

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)} x_n = f_1^{(1)} \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)} x_n = f_2^{(2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = f_n^{(n)} \end{cases} \tag{1.2}$$

Алгоритм нахождения решения системы (1.2) представляется очевидным.

Указанная схема проста и удобна. Однако не является универсальной, в том смысле, что для применимости нужно, чтобы все ведущие элементы были отличны от нуля. Близость к нулю ведущих элементов может быть причиной значительной потери точности. Поэтому на практике чаще всего применяется схема единственного деления по главным элементам. В этой схеме в качестве исключаемой на m-м шаге неизвестной выбирается та, коэффициент при которой на предыдущем шаге был наибольшим по модулю.

2) Метод Гаусса – Жордана заключается в преобразовании исходной системы к диагональному виду в результате исключения на каждом шаге переменной $x_j \, (j = \overline{1,n})$ из всех уравнений, за исключением уравнения с номером j.
3) Метод квадратных корней.

Предположим, что матрица A системы симметрична[1]. В этом случае её можно разложить в произведение двух транспонированных друг другу треугольных матриц.

[1] Этого всегда можно добиться путем умножения системы уравнений слева на матрицу A^{T}.

Пусть $$A = S^{\mathrm{T}} S\,, \tag{1.3}$$

где $$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ 0 & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Определим элементы матрицы S.

Имеем

$$a_{ij} = S_{1i}S_{1j} + S_{2i}S_{2j} + \cdots + S_{ii}S_{ij}\,, i\langle j;$$
$$a_{ii} = S_{1i}^2 + S_{2i}^2 + \cdots + S_{ii}^2\,, i = j.$$

Тогда

$$S_{11} = \sqrt{a_{11}}, S_{1j} = \frac{a_{1j}}{S_{11}},$$
$$S_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} S_{ki}^2}, (i > 1);$$
$$S_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} S_{ki}S_{kj}}{S_{ii}}, (j > i)$$
$$S_{ij} = 0, (i > j)$$

Далее, решение системы сводится к решению двух треугольных систем. Равенство $AX = F$ равносильно двум равенствам

$$S^{\mathrm{T}} K = F \quad \text{и} \quad SX = K\,.$$

Элементы вектора K определим по реккурентным формулам

$$K_1 = \frac{f_1}{S_{11}}, \quad K_i = \frac{f_i - \sum_{l=1}^{i-1} S_{li}K_l}{S_{ii}}, i > 1$$

Тогда решение исходной системы находится по формулам

$$x_n = \frac{K_n}{S_{nn}}, \quad x_i = \frac{K_i - \sum_{l=i+1}^{n} S_{il}x_l}{S_{ii}}, (i < n)$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости решения относительно изменения элементов матрицы.

Теоретическое решение системы $AX = F$ дается формулой

$$X = A^{-1}F,$$

где A^{-1} - матрица, обратная к A. Обратную матрицу называют устойчивой, если малым изменениям в элементах матрицы соответствуют малые изменения в элементах обратной матрицы. Очевидно, что необходимым условием устойчивости обратной матрицы является то, чтобы определитель матрицы не был бы близок к нулю. Но это условие не является достаточным. В качестве меры близости к вырожденности матрицы A рассматривают числа обусловленности:

$$P = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|},$$

где λ_i - собственное значение матрицы A;

и $H = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

Матрицу называют плохо обусловленной, если соответствующая ей обратная матрица неустойчива.

Чем больше числа обусловленности, тем хуже обусловленность матрицы.

На практике этим определением обусловленности воспользоваться достаточно трудно, т.к. это связано с нахождением обратной матрицы и собственных значений матрицы. Поэтому обычно ограничиваются проверкой условия $\det A \approx 0$. Для этого систему нормируют, т.е. i-е уравнение системы делят на величину $\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$, а затем определитель полученной матрицы сравнивают с единицей. Малость указанного определителя по сравнению с единицей является признаком плохой обусловленности системы.

<u>Порядок выполнения работы</u>

1. Изучить теоретическую часть.

2. Написать программу решения системы одним из указанных методов. Отладить её на модельной задаче.
3. Вычислить значение нормированного определителя матрицы.
4. Найти решение системы. Вычислить норму вектора невязки $r = F - A\widetilde{X}$, где $\widetilde{X}$ - найденное решение системы.
5. Внести случайную погрешность в элементы матрицы системы и определить решение для измененной матрицы.
6. Найти решение системы, воспользовавшись одним из стандартных математических пакетов: MathCad, MathLab и т. п. Сравнить результаты с результатами, полученными с помощью выше описанных методов.
7. Проанализировать результаты. Сделать выводы о точности метода и устойчивости системы.

Варианты заданий.

1) $$A = \begin{pmatrix} 67.09 & -40.45 & -16.77 & 9.87 \\ -40.45 & 24.66 & 9.86 & -5.92 \\ -16.77 & 9.86 & 4.94 & -2.97 \\ 9.87 & -5.92 & -2.97 & 1.98 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} 1.05 \\ 21.33 \\ 7.11 \\ -0.23 \end{pmatrix}$$

2) $$A = \begin{pmatrix} 5.01 & 7.01 & 5.99 & 5.00 \\ 7.01 & 10.02 & 8.01 & 7.02 \\ 5.99 & 8.01 & 10.01 & 8.98 \\ 5.00 & 7.02 & 8.98 & 10.00 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} 0.08 \\ 21.52 \\ -7.31 \\ 51.63 \end{pmatrix}$$

3) $$A = \begin{pmatrix} 0.23 & 1.28 & -5.13 & 0.14 \\ 2.28 & 6.31 & -7.15 & 0.01 \\ 2.51 & 3.15 & 1.06 & 0.86 \\ 4.28 & 7.65 & 5.41 & 2.37 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} 1.21 \\ 2.78 \\ -6.35 \\ 0.63 \end{pmatrix}$$

4) $$A=\begin{pmatrix} 2.46 & -1.27 & 15.32 & 6.12 \\ -0.73 & -10.15 & 2.29 & 3.30 \\ -7.41 & -0.81 & -1.27 & 6.31 \\ 0.06 & 0.01 & -10.21 & 7.45 \end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} 3.28 \\ 10.24 \\ -3.58 \\ 0.51 \end{pmatrix}$$

5) $$A=\begin{pmatrix} 2.38 & 7.41 & -5.15 & 0.15 \\ -6.31 & 0.28 & 2.31 & 0.45 \\ -7.11 & 28.31 & 43.25 & 16.01 \\ -0.07 & 5.21 & 0.01 & 0.04 \end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} 15.32 \\ 0.15 \\ 23.16 \\ 0.15 \end{pmatrix}$$

6) $$A=\begin{pmatrix} 13.21 & 6.15 & 7.11 & 0.82 \\ -10.15 & -3.16 & 2.22 & -0.18 \\ -7.10 & 2.32 & -0.91 & 0.98 \\ 3.45 & 16.21 & 96.17 & 103.22 \end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} 1.12 \\ 2.45 \\ 126.17 \\ 0.15 \end{pmatrix}$$

7) $$A=\begin{pmatrix} 3.42 & -4.15 & 2.22 & 1.16 \\ 1.43 & 2.14 & -0.72 & -1.28 \\ 0.45 & 16.21 & 7.32 & 15.61 \\ 2.34 & -0.07 & 0.17 & 0.49 \end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} 1.06 \\ 2.35 \\ 4.21 \\ -10.11 \end{pmatrix}$$

8) $$A=\begin{pmatrix} 2.34 & 15.11 & 2.43 & 6.15 \\ 1.43 & 7.21 & -1.13 & 1.28 \\ -2.35 & 7.15 & 1.17 & 2.38 \\ 1.16 & 5.14 & 2.32 & 7.16 \end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} 0.01 \\ 18.22 \\ 7.45 \\ 5.21 \end{pmatrix}$$

9) $$A=\begin{pmatrix} 3.22 & 7.46 & -1.28 & 1.36 \\ 2.58 & 6.22 & -7.10 & 2.31 \\ 3.28 & 1.43 & 1.55 & 0.01 \\ 2.45 & -7.11 & 9.95 & -3.34 \end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} 1.15 \\ 0.07 \\ 11.21 \\ -4.43 \end{pmatrix}$$

10) $$A=\begin{pmatrix} 7.43 & 1.24 & -1.17 & -0.03 \\ 1.12 & 0.27 & -6.31 & -10.05 \\ 11.22 & -1.17 & 5.34 & 1.26 \\ 0.01 & 0.07 & 1.24 & 1.17 \end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} 1.23 \\ 1.15 \\ 0.07 \\ -1.27 \end{pmatrix}$$

11) $$A=\begin{pmatrix} 1.26 & 1.15 & 2.46 & 28.15 \\ -0.43 & -15.13 & 1.24 & 17.43 \\ 23.16 & -1.12 & 1.15 & -10.16 \\ 0.13 & 21.22 & 1.46 & 7.15 \end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} 1.16 \\ -2.51 \\ 1.17 \\ 8.46 \end{pmatrix}$$

12) $$A=\begin{pmatrix} 15.26 & -1.21 & 17.13 & -7.78 \\ 2.31 & -2.41 & 11.28 & 1.15 \\ 5.46 & -1.24 & 11.74 & -0.01 \\ 0.04 & 1.13 & 2.41 & 6.37 \end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} 78.13 \\ -0.05 \\ 11.12 \\ 0.14 \end{pmatrix}$$

13) $$A=\begin{pmatrix} 1.46 & 1.21 & -0.08 & 0.12 \\ -21.62 & 1.47 & 27.16 & -3.21 \\ 1.28 & 7.45 & 3.51 & -28.63 \\ 11.16 & 17.51 & -0.07 & -1.48 \end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} 1.49 \\ -0.07 \\ 12.56 \\ 11.32 \end{pmatrix}$$

14) $$A=\begin{pmatrix} 4.48 & -2.34 & -17.61 & 11.31 \\ 5.48 & 6.38 & 21.76 & 31.87 \\ -0.01 & 1.21 & 17.45 & -27.13 \\ 15.21 & 0.05 & -0.78 & 1.28 \end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} 1.58 \\ 27.13 \\ 0.08 \\ -2.43 \end{pmatrix}$$

15) $$A=\begin{pmatrix} 3.46 & 1.12 & -2.28 & 16.43 \\ -0.25 & 0.73 & -11.23 & 14.42 \\ -1.28 & 7.67 & 1.13 & 2.43 \\ 1.16 & 2.34 & -0.09 & 13.44 \end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} 6.43 \\ -1.23 \\ -0.73 \\ 1.15 \end{pmatrix}$$

16) $$A=\begin{pmatrix}1.67 & 7.43 & -2.31 & 0.99\\ 1.01 & -2.34 & -7.45 & 0.35\\ 2.34 & 11.21 & 7.15 & 6.34\\ 4.39 & 17.56 & 3.21 & 11.28\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}0.01\\ 11.57\\ 0.34\\ 12.63\end{pmatrix}$$

17) $$A=\begin{pmatrix}15.21 & 1.46 & 17.34 & -2.34\\ 0.08 & 1.49 & 13.28 & -0.97\\ 11.16 & 21.73 & 3.51 & 6.28\\ 7.48 & 3.96 & 11.21 & 9.99\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1.28\\ 7.48\\ -1.13\\ 21.64\end{pmatrix}$$

18) $$A=\begin{pmatrix}1.48 & 2.31 & 1.16 & -1.14\\ 2.34 & 0.07 & 2.31 & -0.86\\ 11.21 & -6.38 & 11.28 & 1.17\\ 5.47 & 16.21 & 7.51 & 0.02\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1.58\\ 28.46\\ -1.15\\ 2.38\end{pmatrix}$$

19) $$A=\begin{pmatrix}15.49 & 6.37 & 16.21 & 7.48\\ 0.08 & -2.31 & -16.28 & 7.15\\ 1.28 & 0.13 & 5.48 & 16.11\\ 0.01 & 0.08 & 0.21 & -15.46\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1.99\\ -2.31\\ 11.16\\ 5.35\end{pmatrix}$$

20) $$A=\begin{pmatrix}2.97 & -1.13 & 0.08 & 0.97\\ 16.41 & 1.38 & 0.18 & 1.29\\ -13.51 & 7.64 & 9.28 & 6.31\\ 0.02 & 9.97 & -7.13 & 28.14\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}43.15\\ 28.14\\ -0.09\\ 19.23\end{pmatrix}$$

21) $$A=\begin{pmatrix}17.31 & -5.34 & 9.87 & 16.31\\ 0.08 & 10.21 & -7.13 & 16.21\\ 14.07 & 15.11 & -10.21 & 0.07\\ -13.21 & -1.08 & 2.43 & 5.14\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}15.11\\ -0.17\\ 21.13\\ 1.14\end{pmatrix}$$

22) $A = \begin{pmatrix} 13.51 & 2.87 & 16.15 & 0.011 \\ 15.31 & 0.09 & -9.35 & -0.18 \\ 11.49 & 16.51 & 7.49 & 28.13 \\ 5.96 & 7.43 & -0.03 & 9.07 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 10.16 \\ -0.13 \\ 21.61 \\ 7.38 \end{pmatrix}$

23) $A = \begin{pmatrix} 10.16 & -2.34 & 0.99 & 7.46 \\ 23.99 & -7.16 & 7.28 & -0.18 \\ 27.15 & -0.08 & 27.16 & -1.13 \\ 0.97 & 15.16 & 0.01 & 23.16 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 10.29 \\ 17.35 \\ 11.87 \\ -0.93 \end{pmatrix}$

24) $A = \begin{pmatrix} 1.16 & -0.18 & 0.93 & 9.27 \\ 0.18 & 0.29 & 3.15 & 7.16 \\ 23.19 & 7.15 & -9.13 & 0.01 \\ 3.41 & 9.21 & 7.15 & 0.28 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 11.17 \\ 23.19 \\ -3.48 \\ 0.17 \end{pmatrix}$

25) $A = \begin{pmatrix} 77.16 & 2.31 & -0.17 & 3.51 \\ 0.09 & 1.15 & 1.21 & -7.15 \\ 2.49 & 0.07 & -0.29 & 1.31 \\ 16.25 & 1.27 & 5.34 & 6.48 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 5.31 \\ -0.19 \\ 1.16 \\ 7.41 \end{pmatrix}$

Лабораторная работа №2.

Итерационные методы решения систем уравнений.

Цель работы – решение системы уравнений одним из итерационных методов.

Теоретическая часть.

1) Метод простой итерации.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = f_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = f_n \end{cases} \qquad (2.1)$$

Разделим каждое уравнение системы (2.1) на диагональный элемент. Получим систему

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \dfrac{f_1}{a_{11}} \\ \dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + x_2 + \cdots + \dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n = \dfrac{f_2}{a_{22}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 + \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 + \cdots + x_n = \dfrac{f_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

или в матричной форме

$$X = BX + G, \qquad (2.2)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \; G = \begin{pmatrix} \dfrac{f_1}{a_{11}} \\ \dfrac{f_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \dfrac{f_n}{a_{nn}} \end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

Данное преобразование системы (2.1) в систему (2.2) равносильно умножению системы (2.1) слева на матрицу

$$H=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Таким образом, $H = D^{-1}$,

где D - диагональная матрица $[a_{11}, \dots, a_{nn}]$.

Выберем начальное приближение $X^{(0)} = G$. Строим последовательные приближения по формулам

$$X^{(k)} = BX^{(k-1)} + G, \tag{2.4}$$

$k = 1,2,3,\dots$ или в развернутом виде

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^{(k-1)} + g_i, i = \overline{1,n}$$

<u>Необходимое и достаточное условие</u> сходимости процесса простой итерации состоит в том, что все собственные значения матрицы были

$$B = E - D^{-1}A$$

по модулю меньше единицы.

Укажем достаточные признаки сходимости процесса последовательных приближений:

Если выполняется одно из условий:

I. $\|B\|_{\mathrm{I}} = \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \le \mu < 1$ при $i = \overline{1,n}$

II. $\|B\|_{\mathrm{II}} = \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| \le \nu < 1$ при $j = \overline{1,n}$

Ш. $\|B\|_{\mathrm{III}} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 \le \rho < 1,$

то процесс последовательных приближений сходится.

Это равносильно преобладанию диагональных элементов в исходной матрице A.

2) Метод Зейделя.

Пусть система уравнений $AX = F$ представлена в виде

$$X = BX + G, \tag{2.5}$$

где $B = E - A, \quad G = F$.

Метод Зейделя похож на метод простой итерации с той лишь разницей, что при вычислении k-го приближения для i-й компоненты учитываются вычисленные уже ранее k-е приближения для компонент

$x_1^{(k)}, \cdots, x_{i-1}^{(k)}$.

Вычисление последовательных приближений ведется по формулам

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^{n} b_{ij} x_j^{(k-1)} + g_i \tag{2.6}$$

3) Метод полной релаксации.

Пусть X^* - точное решение системы

$$AX = F$$

с положительно-определенной матрицей A. (Для того, чтобы получить систему с положительно-определенной матрицей, эквивалентную исходной, нужно умножить систему слева на транспонированную матрицу A^{T}).

Пусть X - некоторый вектор,

$f(X) = (AY, Y)$ - функция ошибки,

где $Y = X^* - X$ -вектор ошибки.

Изменим i-ю компоненту вектора X так, чтобы для измененного вектора X' значение функции ошибки было бы наименьшим.

Пусть $X' = X + \alpha e_i$.

Тогда $Y' = Y - \alpha e_i$, и

$$f(X') = (AY', Y') = (A(Y - \alpha e_i), Y - \alpha e_i) =$$

$$= (AY, Y) - 2\alpha(AY, e_i) + \alpha^2 (Ae_i, e_{i)} = (AY, Y) + \alpha^2 a_{ii} - 2\alpha r_i =$$

$$= f(X) + \frac{(a_{ii}\alpha - r_i)^2 - r_i^2}{a_{ii}}, \tag{2.7}$$

где $r_i - i$ - компонента вектора невязки

$$r = F - AX$$

для приближения X.

$f(X')$ будет иметь минимальное значение при $\alpha = \frac{r_i}{a_{ii}}$.

В этом случае i-я компонента вектора невязки для приближения X' обратится в ноль.

Выбор номеров изменяемых компонент можно осуществлять либо циклически от 1 до n, либо на каждом шаге выбирать компоненту с некоторым номером k, если на предыдущем шаге k-я компонента вектора невязки оказалась наибольшей по модулю.

Подготовка системы уравнений к виду, удобному для применения метода последовательных приближений.

Пусть матрица A положительно определена. Тогда система $AX = F$ всегда может быть подготовлена к виду, в котором метод последовательных приближений будет сходящимся. Подготовка состоит в переходе от данной системы $AX = F$ к равносильной системе $HAX = HF$,

где H - некоторая неособенная матрица, которая выбирается так, чтобы матрица HA была бы близка к единичной.

Положим

$$H = \frac{2}{\mu} E, \tag{2.8}$$

где μ - норма матрицы A.

Тогда система уравнений преобразуется к виду

$$X = (E - \frac{2}{\mu} A)X + \frac{2}{\mu} F = BX + G \tag{2.9}$$

Собственные значения матрицы

$$B = E - \frac{2}{\mu} A$$

будут заключены в открытом интервале (-1,1), в силу того собственные значения положительно определенной матрицы A находятся в интервале $(0,\mu)$. Следовательно, метод последовательных приближений для системы (2.9) будет сходящимся.

<u>Порядок выполнения работы.</u>

1. Изучить теоретическую часть.
2. Написать программу решения системы одним из указанных методов. Отладить программу на модельной задаче.
3. Определить три нормы матрицы.
4. Найти решение системы с заданной точностью. Для этого выход из цикла, осуществляющего итерационный процесс, производить, как только норма соответствующего вектора невязки меньше наперед заданной точности.

Выход из цикла можно также осуществлять, как только норма разности между векторами решений, полученных на данном шаге и на предыдущем станет меньше заданной погрешности.

5. Исследовать скорость сходимости метода в зависимости от числа итерации.
6. Сделать выводы о точности метода и быстроте его сходимости.
7. Найти решение системы, воспользовавшись одним из стандартных математических пакетов: MathCad, MathLab и т. п. Сравнить результаты с результатами, полученными с помощью итерационных методов.

Воспользоваться вариантами заданий для лабораторной работы №1.

Лабораторная работа № 3.

Градиентные методы решения систем уравнений.

Цель работы – изучение градиентных итерационных методов, решение системы уравнений одним из градиентных методов.

Теоретическая часть.

Градиентные методы основаны на минимизации выбранного функционала, характеризующего точность решения, (например, функционала ошибки, длины вектора невязки) в направлении, противоположном направлению градиента функционала в данной точке. Такой выбор направления минимизации связан с тем, что направление, противоположное направлению градиента функционала, в некоторой точке, обеспечивает в окрестности этой точки наиболее быстрое убывание функционала.

1) Метод наискорейшего спуска.

Пусть A положительно определенная матрица и пусть

$$AX = F \tag{3.1}$$

заданная линейная система.

Ставится задача нахождения вектора, дающего минимум функционалу

$$H(X) = (AX, X) - 2F(X) \tag{3.2}$$

Т.к. этот функционал отличается от функции ошибки $f(X) = (AY, Y)$ на постоянное слагаемое (AX^*, X^*), где X^* - точное решение, то эта задача равносильна нахождению вектора, дающего минимум функции ошибки.

Выбирается начальное приближение X_0. Вычисляется направление, противоположное градиенту функционала $H(X)$ в этой точке, которое совпадает с направлением вектора невязки $r_0 = F - AX_0$ выбранного начального приближения. Из точки X_0 движемся в выбранном направлении до точки X_1, дающей минимум функционалу $H(X)$.

Положим

$$X_1 = X_0 + \alpha r_0 \tag{3.3}$$

Нетрудно убедиться, что функционал $H(X_0 + \alpha r_0)$ достигает минимального значения при

$$\alpha = \alpha_0 = \frac{(r_0, r_0)}{(Ar_0, r_0)} \tag{3.4}$$

Далее определяется $X_2 = X_1 + \alpha_1 r_1$, где $r_1 = F - AX_1$ и $\alpha_1 = \dfrac{(r_1, r_1)}{(Ar_1, r_1)}$

и процесс продолжается по формулам

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_k + \alpha_k r_k, \\ r_k &= F - AX_k = r_{k-1} - \alpha_{k-1} A r_{k-1}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\text{где } \alpha_k = \frac{(r_k, r_k)}{(Ar_k, r_k)} \tag{3.6}$$

<u>2) Градиентный метод с минимальными невязками.</u>

Пусть A положительно-определенная матрица, X_0 - начальное приближение к решению системы $AX = F$. Следующее приближение X_1 ищется так же как и в методе наискорейшего спуска, в виде $X_1 = X_0 + \beta r_0$, но параметр β подбирается так, чтобы минимизировалась длина вектора невязки (r). Таким образом, здесь минимизируется функционал (r, r) в направлении, противоположном градиенту функционала ошибки.

После выполнения первого шага процесс повторяется.

Пусть

$$X_{k+1} = X_k + \beta_k r_k, \tag{3.7}$$

тогда

$$r_{k+1} = r_k - \beta_k A r_k, \tag{3.8}$$

Нетрудно убедиться, что функционал (r_{k+1}, r_{k+1}) принимает минимальное значение равное

$$(r_{k+1}, r_{k+1}) - \frac{(Ar_k, r_k)^2}{(Ar_k, Ar_k)}$$

При

$$\beta_k = \frac{(Ar_k, r_k)}{(Ar_k, Ar_k)} \tag{3.9}$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучить теоретическую часть.
2. Написать программу решения системы одним из градиентных методов. Отладить программу на модельной задаче.
3. Найти решение системы с заданной точностью.
4. Исследовать скорость сходимости метода в зависимости от числа итераций.
5. Сделать выводы о точности метода, скорости его сходимости. Сравнить результаты с результатами решения с помощью точных методов и методов последовательных приближений .
6. Найти решение системы, воспользовавшись одним из стандартных математических пакетов: MathCad, MathLab и т. п. Сравнить результаты с результатами, полученными с помощью градиентных методов.

Воспользоваться вариантами заданий к лабораторной работе №1.

Лабораторная работа № 4.

<u>Методы решения полной проблемы собственных значений.</u>

Цель работы – изучение методов решения полной проблемы собственных значений, нахождение всех собственных значений и собственных векторов матрицы методом Крылова или Леверье.

Теоретическая часть.

Под полной проблемой собственных значений понимается проблема нахождения всех собственных значений матрицы *A* и принадлежащих им собственных векторов.

Собственными значениями матрицы *A* называются корни ее характеристического уравнения:

$$|A - tE| = \begin{vmatrix} a_{11-t} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22-t} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn-t} \end{vmatrix} = (-1)^n (t^n - p_1 t^{n-1} - \dots - p^n) = 0$$

Определение компонент собственного вектора требует решения системы n однородных уравнений с n неизвестными.

Коэффициенты p_i характеристического полинома являются, с точностью до знака, суммами всех миноров определителя матрицы *A* порядка i , опирающихся на главную диагональ. Поэтому непосредственное вычисление коэффициентов p_i является очень громоздким.

В связи с этим применяются специальные приемы, упрощающие численное решение поставленных задач. Большинство методов, дающих решение полной проблемы собственных значений, заключается в вычислении коэффициентов характеристического полинома, которое осуществляется теми или иными способами, минуя вычисление многочисленных миноров. Собственные значения вычисляются затем по какому-либо методу для приближенного вычисления корней полинома.

Одним из простейших методов приближенного нахождения корней многочлена является метод половинного деления.

Пусть дано уравнение

$$\varphi(t) = 0 \tag{4.1}$$

где функция $\varphi(t)$ непрерывна на [a,b] и $\varphi(a)\varphi(b)\langle 0$.

Для нахождения корня уравнения (4.1), принадлежащего отрезку [a,b], делим этот отрезок пополам. Если $\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то $t_1 = \frac{a+b}{2}$ является корнем уравнения. Если $\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, то выбираем ту из половин исходного отрезка, на концах которого функция $\varphi(t)$ имеет различные знаки.

Новый отрезок снова делим пополам и процесс повторяем.

В результате получаем на каком-то этапе или точный корень уравнения (1), или же бесконечную последовательность вложенных друг в друга отрезков $\{[a_n,b_n]\}$, таких что $\varphi(a_n)\varphi(b_n)\langle 0$, n=1, 2, … и $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$.

Если требуется найти корень уравнения (4.1) с заданной точностью, то следует продолжать процесс до тех пор, пока длина интервала $b_n - a_n$ не станет меньше заданной точности.

Вычисление значений полинома $\varphi(t)$ в данной точке t_0 следует проводить по схеме Горнера:

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \end{matrix},$$

которая заполняется по реккурентным формулам:

$$b_i = b_{i-1}t_0 + a_i,\ i = \overline{1,n}$$

Тогда $b_n = \varphi(t_0)$.

Числа $a_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ будут коэффициентами частного $\varphi_1(t)$ от деления полинома $\varphi(t)$ на t-t_0.

1) Метод Крылова.

Идея метода заключается в предварительном преобразовании уравнения

$$\varphi(t) = \begin{vmatrix} a_{11-t} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22-t} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn-t} \end{vmatrix} = 0 \tag{4.2}$$

в эквивалентное ему уравнение вида:

$$D(t) = \begin{vmatrix} b_{11-t} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21-t^2} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1-t^n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{4.3}$$

развертывание которого по степеням t осуществляется гораздо проще.

Нетрудно проверить, что при выборе коэффициентов b_{ik} по следующим формулам

$$\begin{aligned} b_{1k} &= a_{1k}, \\ b_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} b_{i-1},\, j a_{jk}, \end{aligned} \quad i = \overline{1,n}\ ,\ k = \overline{1,n} \tag{4.4}$$

справедливо равенство

$$\frac{D(t)}{\varphi(t)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} = N, \tag{4.5}$$

т.е. при $N \neq 0$ $D(t)$ отличается от искомого характеристического полинома только численным множителем.

Зафиксируем вектор

$$B_0 = (1,0,\dots,0)^{\mathrm{T}},$$

тогда справедливо равенство

$$B_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^i B_0,$$

$$i = \overline{1.n}$$

При $N \neq 0$ векторы $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ образуют базис пространства. Тогда вектор B_n является их линейной комбинацией:

$$B_n = q_1 B_{n-1} + \ldots + q_n B_0 \tag{4.6}$$

Нетрудно показать, что коэффициенты этого соотношения и являются коэффициентами p_i характеристического полинома

$$\varphi(t) = (-1)^n \left[t^n - p_1 t^{n-1} - \ldots - p_n\right]$$

Таким образом, решив систему уравнений (4.6), найдем коэффициенты характеристического полинома

$$q_1 = p_1, \ldots, q_n = p_n.$$

Очевидно, что вместо системы (4.6) можно использовать систему

$$C_n = p_1 C_{n-1} + \ldots + p_n C_0, \tag{4.7}$$

где векторы C_n определяются равенствами

$$C_k = A^k C_0.$$

Определим теперь собственные векторы $X_1, X_2, \ldots, X_n$ матрицы A, принадлежащие собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Т.к. $X_1, \ldots, X_n$ линейно независимы, то справедливо разложение

$$C_0 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n \tag{4.8}$$

Тогда

$$C_1 = AC_0 = \alpha_1 \lambda_1 X_1 + \alpha_2 \lambda_2 X_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n X_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_{n-1} = A^{n-1} C_0 = \alpha_1 \lambda_1^{n-1} X_1 + \alpha_2 \lambda_2^{n-1} X_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n^{n-1} X_n$$

Нетрудно показать, что собственные векторы могут быть получены в виде линейных комбинаций

$$X_i = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{ij} C_{n-1-j}, \tag{4.9}$$

где $$\beta_{10} = 1, \beta_{ij} = \lambda_i \beta_{i,j-1} - \rho_j, \tag{4.10}$$

$$j = \overline{1, n-1}$$

2) Метод Леверье и его модификация Д.К. Фаддеевым.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - корни характеристического полинома матрицы.

Обозначим

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k = S_k \tag{4.11}$$

Тогда справедливы соотношения Ньютона

$$kp_k = S_k - p_1 S_{k-1} - \ldots - p_{k-1} S_1 \tag{4.12}$$

$$k = \overline{1, n}$$

определив числа S_k, можно найти коэффициенты характеристического полинома, решая реккурентную систему (4.12)

Очевидно, что

$$S_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \mathrm{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Т.к. характеристическими числами матрицы A^k будут

$\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$, то

$$S_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k = \mathrm{Tr} A^k \tag{4.13}$$

Таким образом, процесс вычислений сводится к последовательному вычислению степеней матрицы A, затем к вычислению их следов и к решению реккурентной системы (4.12).

Рассмотрим видоизменение метода, предложенное Фаддеевым, которое кроме упрощений при вычислении коэффициентов характеристического полинома позволяет определить собственные векторы матрицы.

Строится последовательность матриц $A_1, A_2, \ldots, A_n$ следующим образом:

$$A_1 = A, \qquad \mathrm{Tr} A_1 = q_1, \quad B_1 = a_1 - q_1 E$$

$$A_2 = AB_1, \qquad \frac{\mathrm{Tr} A_2}{2} = q_2, \quad B_2 = A_2 - q_2 E \tag{4.14}$$

…………………………………………………

$$A_n = AB_{n-1}, \qquad \frac{\mathrm{Tr} A_n}{n} = q_n, \qquad B_n = A_n - q_n E$$

Нетрудно показать, что справедливы равенства

$$p_1 = q_1,\ p_2 = q_2,\ \ldots,\ p_n = q_n$$

Для определения собственных векторов для каждого собственного значения λ_k строится матрица

$$Q_k = \lambda_k^{n-1} E + \lambda_k^{n-1} B_1 + \ldots + B_{n-1} \qquad (4.15)$$

Нетрудно убедиться, что каждый столбец матрицы Q_k состоит из компонент собственного вектора, принадлежащего собственному числу λ_k.

Порядок выполнения работы

1. Изучить теоретическую часть.
2. Написать программу нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы. Отладить её на модельной задаче.
3. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы.
4. Внести случайную погрешность в коэффициенты матрицы. Определить собственные значения и собственные векторы для измененной матрицы.
5. Сделать выводы о точности метода и устойчивости матрицы.

Варианты заданий

1) $$A = \begin{pmatrix} -5.51 & 1.87 & 0.42 & 0.01 \\ 0.29 & -11.81 & 5.71 & 0.06 \\ 0.05 & 4.31 & -12.97 & 0.23 \\ 0.01 & 0.27 & 1.40 & -17.60 \end{pmatrix}$$

2) $$A = \begin{pmatrix} -7.46 & 11.24 & -0.54 & 14.31 \\ 0.16 & 17.15 & -1.11 & 10.16 \\ 23.17 & 10.26 & 1.19 & 7.43 \\ -28.16 & 0.15 & 0.97 & -3.41 \end{pmatrix}$$

3) $$A=\begin{pmatrix} 10.95 & 1.21 & -7.41 & 0.94 \\ 3.51 & 9.78 & 1.16 & 2.58 \\ 1.95 & 7.36 & 11.21 & -7.43 \\ 10.54 & 11.21 & 7.17 & 2.38 \end{pmatrix}$$

4) $$A=\begin{pmatrix} 1.46 & 23.14 & -0.78 & 1.13 \\ 2.31 & 1.58 & 6.73 & 1.61 \\ -0.13 & -9.21 & 7.41 & 1.23 \\ 0.96 & 1.23 & 3.79 & 5.46 \end{pmatrix}$$

5) $$A=\begin{pmatrix} 7.58 & 16.31 & 2.91 & -0.48 \\ 3.51 & 1.92 & 7.15 & -0.38 \\ -9.61 & 2.34 & 1.15 & 0.97 \\ 7.43 & 2.39 & 5.16 & -1.17 \end{pmatrix}$$

6) $$A=\begin{pmatrix} 3.46 & 9.21 & 7.63 & 3.21 \\ -10.14 & 5.31 & 7.43 & -1.28 \\ 16.54 & 17.23 & 1.28 & 0.38 \\ 1.58 & 7.36 & -2.92 & 0.97 \end{pmatrix}$$

7) $$A=\begin{pmatrix} 5.51 & 2.34 & 7.49 & -6.24 \\ 3.73 & -1.28 & 0.13 & 0.79 \\ 2.49 & 6.51 & 3.22 & 0.34 \\ 4.28 & 0.76 & 2.31 & -10.11 \end{pmatrix}$$

8) $$A=\begin{pmatrix} 93.11 & 0.58 & 1.28 & 2.47 \\ 1.15 & 2.97 & -1.81 & 2.73 \\ 0.38 & -0.43 & 0.15 & 0.97 \\ 2.53 & 9.63 & 11.22 & 7.15 \end{pmatrix}$$

9) $$A=\begin{pmatrix} 21.46 & 3.98 & 11.24 & 0.73 \\ 0.58 & -9.41 & 2.77 & -0.21 \\ 2.38 & 9.97 & 5.41 & 10.11 \\ -1.22 & 0.79 & 6.31 & 22.17 \end{pmatrix}$$

10) $$A=\begin{pmatrix} 7.48 & 16.21 & 9.34 & 0.58 \\ 6.34 & 1.47 & 6.94 & -0.77 \\ -0.15 & 1.24 & 9.98 & 7.63 \\ 10.28 & 1.38 & -7.51 & -2.99 \end{pmatrix}$$

11) $$A=\begin{pmatrix} 51.15 & 2.13 & -1.16 & 0.15 \\ 2.77 & 1.15 & -0.73 & -1.97 \\ 3.48 & 0.97 & 16.21 & 9.32 \\ 3.76 & 0.21 & -0.58 & 0.76 \end{pmatrix}$$

12) $$A=\begin{pmatrix} 0.78 & 0.93 & -9.51 & 6.32 \\ 7.56 & 23.12 & 77.14 & 5.31 \\ 13.21 & 0.79 & 17.16 & 23.19 \\ 3.48 & 0.56 & -27.19 & 0.37 \end{pmatrix}$$

13) $$A=\begin{pmatrix} 7.56 & 23.17 & 6.43 & 0.93 \\ 9.87 & -0.73 & 3.19 & -0.74 \\ 0.21 & 0.79 & -2.34 & 3.78 \\ 5.64 & 1.22 & 0.73 & 1.12 \end{pmatrix}$$

14) $$A=\begin{pmatrix} 10.51 & 23.17 & -1.21 & 0.97 \\ 2.34 & -2.77 & 0.93 & 9.87 \\ 0.43 & 4.31 & 2.78 & 1.73 \\ 10.11 & 23.05 & 7.08 & 0.02 \end{pmatrix}$$

15) $$A=\begin{pmatrix} 2.58 & 10.66 & -2.79 & 0.58 \\ 6.33 & -1.12 & 5.78 & -0.98 \\ 10.52 & 0.38 & -3.43 & 15.22 \\ 1.28 & 0.43 & -1.22 & 1.15 \end{pmatrix}$$

16) $$A=\begin{pmatrix} 5.97 & 2.34 & 1.15 & -1.21 \\ 0.77 & 6.34 & 1.43 & 5.21 \\ 0.34 & 2.48 & 0.77 & -0.12 \\ 2.34 & -5.58 & 7.78 & 2.35 \end{pmatrix}$$

17) $$A=\begin{pmatrix} 9.49 & -2.21 & 0.77 & 5.34 \\ 2.78 & 5.41 & 9.28 & -0.73 \\ 6.28 & 0.73 & 10.52 & 3.48 \\ 0.15 & 2.74 & 0.21 & -5.38 \end{pmatrix}$$

18) $$A=\begin{pmatrix} 5.92 & 0.16 & -1.13 & 10.28 \\ 5.07 & 6.34 & 0.28 & -7.42 \\ 9.54 & 3.49 & 0.16 & -9.21 \\ 0.06 & 0.08 & -3.41 & 4.28 \end{pmatrix}$$

19) $$A=\begin{pmatrix} 5.92 & 0.16 & -1.13 & 10.28 \\ 5.07 & 6.34 & 0.28 & -7.42 \\ 9.54 & 3.49 & 0.16 & -9.21 \\ 0.06 & 0.08 & -3.41 & 4.28 \end{pmatrix}$$

20) $$A=\begin{pmatrix} 10.29 & 0.38 & -0.77 & -5.14 \\ -9.27 & 16.34 & 0.99 & 0.13 \\ 15.54 & -2.17 & 0.97 & 0.18 \\ 4.48 & 2.97 & 6.38 & 1.28 \end{pmatrix}$$

21) $$A=\begin{pmatrix} 0.77 & 15.21 & -3.41 & 0.14 \\ 0.07 & 0.29 & 16.11 & 2.34 \\ 9.77 & 0.19 & 3.51 & -6.24 \\ 3.21 & 1.15 & 1.28 & 0.76 \end{pmatrix}$$

22) $$A=\begin{pmatrix} 9.32 & 1.28 & 7.46 & -1.15 \\ 0.77 & 2.34 & -5.41 & 0.14 \\ -10.21 & 3.42 & 6.54 & 7.28 \\ 3.48 & 6.92 & 0.34 & 0.07 \end{pmatrix}$$

23) $$A=\begin{pmatrix} 2.73 & -1.15 & 2.34 & 0.28 \\ 7.56 & 2.34 & 1.94 & 0.07 \\ 5.68 & 0.39 & 7.49 & 2.34 \\ -1.58 & 0.37 & 0.01 & 2.97 \end{pmatrix}$$

24) $$A=\begin{pmatrix} 1.16 & 2.34 & -0.92 & 1.17 \\ 0.56 & 1.13 & 1.28 & 3.43 \\ 10.07 & 6.34 & -1.27 & 7.49 \\ 0.08 & 3.58 & 4.92 & -1.28 \end{pmatrix}$$

25) $$A=\begin{pmatrix} 9.91 & 0.34 & 7.43 & -2.51 \\ 0.98 & 7.35 & 4.21 & -0.12 \\ 2.34 & 7.39 & 5.77 & 6.34 \\ 2.91 & 10.15 & 3.28 & 0.79 \end{pmatrix}$$

Список литературы

1. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры.- Москва, 1960, 656 с.
2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики.- Москва, 1963, 659 с.
3. Бахвалов Н.С. Численные методы.- Москва, 1975, 631 с.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений.- т.2,- Москва, 1962, 639 с.
5. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы.- т.1,- Москва, 1976, 303 с.